1 Définition

La fonction $exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
D'après le TVI, l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction exp est l'intervalle $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0;+\infty[$, il existe une unique réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$.
On définit donc une fonction de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Elle se nomme logarithme népérien et se note ln.

$$\boxed{ln : x \mapsto ln(x) \text{ avec } x \in]0;+\infty[}$$

Conséquences de la définition :

1. $\mathrm{e}^{ln(x)} = x$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
2. $ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$ pour tout x réel.
3. $ln(1) = 0 \qquad ln(\mathrm{e}) = 1$.

Quelques exemples numériques :

$ln\left(\mathrm{e}^3\right) = 3$

$\mathrm{e}^{\frac{x}{3}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = ln(2) \Leftrightarrow x = 3ln(2)$

$\mathrm{e}^{5x} = 0$ est impossible

$\mathrm{e}^{ln(5)} = 5$

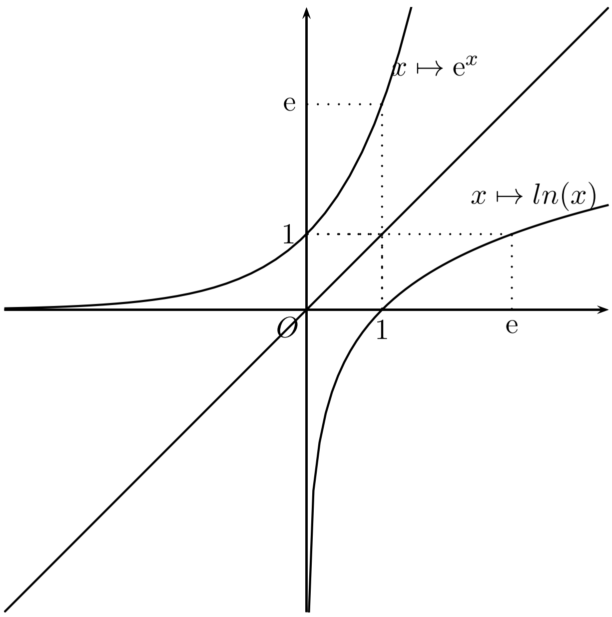
$\mathrm{e}^{-x} = -2$ est impossible

$ln(\mathrm{e}) = 1$ et $ln(1) = 0$

Existence de $ln(u)$:

L'expression $ln(5-3x)$ a un sens si $5-3x > 0$.
On résout alors une inéquation pour déterminer l'ensemble de définition de l'expression $ln(u)$.
Dans ce cas , $ln(5-3x)$ existe si $x < \dfrac{5}{3}$.

2 Courbe représentative de $ln : x \mapsto ln(x)$



Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3 Etude de la fonction ln

3.1 Ensemble de définition

La fonction $ln : x \mapsto ln(x)$ a pour ensemble de définition l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exemples :

1. Soit $f(x) = ln(4x - 1)$. Déterminer l'ensemble de défintion de f.

   $f(x)$ existe si $4x - 1 > 0$ c'est à dire si $x > \dfrac{1}{4}$ donc $D_f =]\dfrac{1}{4}; +\infty[$.
2. Soit $g(x) = ln(x^2)$. Déterminer l'ensemble de définition de g.

   $g(x)$ existe si $x^2 > 0$ donc $D_g =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

3.2 Croissance de la fonction ln sur $]0; +\infty[$

Propriété :

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration :

Soient a et b dans $]0; +\infty[$ tels que $a < b$. On sait que $e^{ln(a)} = a$ et $e^{ln(b)} = b$.
Donc $e^{ln(a)} < e^{ln(b)}$ or la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $ln(a) < ln(b)$.
Donc $a < b$ entraine $ln(a) < ln(b)$. Donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Remarque : La fonction ln réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Conséquences :

1. a et b strictement positifs $\quad ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$
2. a et b strictement positifs $\quad ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b$

Exemple : Résoudre l'équation $\quad ln(x^2 - 2x - 3) = ln(-x + 3)$.

1. Existence Il faut $\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 2x - 3 & > & 0 \\ -x + 3 & > & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = &]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[\\ D_2 & = &]-\infty; 3[\end{array} \right.$ Donc l'ensemble de définition de l'équation est $D = D_1 \cap D_2 =]-\infty; -1[$.
2. Résolution On utilise la régle :

$$ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\begin{array}{rcl} ln(x^2 - 2x - 3) & = & ln(-x + 3) \\ x^2 - 2x - 3 & = & -x + 3 \\ x^2 - x - 6 & = & 0 \end{array}$$

On obtient deux possibilités $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$. Or $-2 \in D$ et $3 \notin D$. Donc l'ensemble de solution de l'équation est $\quad S = \{-2\}$.

4 Relations fonctionnelles

Propriété 1 :

$$ln(x \times y) = ln(x) + ln(y) \qquad \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ strictement positifs.}$$

Démonstration :

Soient $x > 0$ et $y > 0$ donc $xy > 0$. Or $\mathrm{e}^{ln(x)} = x$ et $\mathrm{e}^{ln(y)} = y$ et $\mathrm{e}^{ln(xy)} = xy$.
On a donc $\mathrm{e}^{ln(x)} \times \mathrm{e}^{ln(y)} = \mathrm{e}^{ln(xy)}$
Or $\mathrm{e}^{ln(x)} \times \mathrm{e}^{ln(y)} = \mathrm{e}^{ln(x)+ln(y)}$. La relation devient :
$\mathrm{e}^{ln(x)+ln(y)} = \mathrm{e}^{ln(xy)} \Leftrightarrow ln(x + ln(y) = ln(xy)$.

Exemple : $ln(6) = ln(2) + ln(3)$.

Application 1 : Simplifier le nombre $\ln(\sqrt{2} - 1) + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Application 2 : Résoudre l'équation : $\ln(x) + \ln(x - 7) = \ln(12)$.

Propriété 2 :

$$ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ strictement positif.}$$

Démonstration :

Soit $x > 0$. $ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = ln(1)$. Donc $ln(x) + ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ D'où $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$.

Propriété 3 :

$$ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y) \qquad \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ strictement positifs.}$$

Démonstration :

Soit $x > 0$ et $y > 0$. On a : $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = ln(x) + ln\left(\frac{1}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$.

Propriété 4 :

$$ln(x^2) = 2ln(x) \qquad \text{et} \qquad ln\left(x^p\right) = p \times ln(x) \qquad \text{pour tout réel } x \text{ strictement positif et } p \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : La formule reste valable si $p \in \mathbb{R}$.

Remarque : $ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}ln(x)$

Démonstration : Soit $x > 0$. $ln\left(\sqrt{x}\right)^2 = ln(x) = 2ln\left(\sqrt{x}\right)$ $ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}ln(x)$.

5 Dérivabilité de $x \mapsto ln(x)$ et de $x \mapsto ln(u(x))$

Propriété 1 :

La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$.

Propriété 2 :

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Idée de la preuve

Soit $x_0 > 0$. On montre que ln est dérivable en x_0 en utilisant le taux d'accroissement !!!

Propriété 3 :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et $u(x) > 0$ sur I alors la fonction $x \mapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Explication : Il faut utiliser la composée : $x \mapsto u(x) \mapsto ln(u(x))$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto ln\left(\frac{1}{ln(x)}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de f et la dérivée de f.

1. Il faut $\frac{1}{ln(x)} > 0$ c'est à dire $ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ Donc $D_f =]1;+\infty[$.
2. f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x(ln(x))^2}}{\frac{1}{ln(x)}} = -\frac{1}{xln(x)}$ car $ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec ici $u(x) = \frac{1}{ln(x)}$ et $u'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(ln(x))^2}$.
   Sur $]1;+\infty[$, $x > 0$ et $ln(x) > 0$ donc $f'(x) < 0$ et donc f est décroissante sur $]1;+\infty[$.

6 Limite en 0 et en $+\infty$ de $ln(x)$

Théorème 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$$

Démonstration :

Tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les réels $ln(x)$ pour tous les réels $x > x_0$ avec $x_0 = \mathrm{e}^A$.
En effet, $ln(x) > A \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^A$ ce qui signifie que $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$.

Théorème 2 :

$$\lim_{x\to0^+} ln(x) = -\infty$$

Démonstration : On pose $X = \frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0^+, X tend vers $+\infty$.

$ln(x) = ln\left(\frac{1}{X}\right) = -ln(X)$. $\lim_{x\to0^+} ln(x) = \lim_{X\to+\infty} -ln(X) = -\infty$. Donc $\lim_{x\to0^+} ln(x) = -\infty$.

7 Croissances comparées de $x \to ln(x)$, $x \to x^n$ et $x \to e^x$

7.1 Comparaison de x^n et $ln(x)$

Propriété 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0 \qquad n \text{ entier naturel non nul.}$$

Démonstration pour $\dfrac{ln(x)}{x}$

On pose $g(x) = ln(x) - \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
$g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$

x	0		4		$+\infty$
signe de f'(x)		$+$	0	$-$	
variation de f		$\nearrow$	$ln(4)-2$	$\searrow$	

$g(4) = ln(4) - 2$ qui est négatif. donc $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$ donc $ln(x) < \sqrt{x}$.
Comme $x > 0$, on a : $\dfrac{ln(x)}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ c'est à dire $\dfrac{ln(x)}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Dés que $x > 1$ on a $ln(x) > 0$ donc on a l'encadrement : $0 < \dfrac{ln(x)}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$$

Propriété 2 :

$$\lim_{x\to 0^+} x^n ln(x) = 0 \qquad n \text{ entier naturel non nul.}$$

Démonstration

On utilise le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers 0^+ alors X tend vers $+\infty$.
De $X = \dfrac{1}{x}$ on tire $x = \dfrac{1}{X}$ et donc $x^n ln(x) = \left(\dfrac{1}{X}\right)^n ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{X^n} \times (-ln(X)) = -\dfrac{ln(X)}{X^n}$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^n ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{ln(X)}{X^n} = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{x\to 0^+} x^n ln(x) = 0.$$

7.2 Comparaison de e^x et x^n où n est un entier naturel tel que $n \geq 1$.

Propriété 3 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad n \text{ entier naturel non nul.}$$

Démonstration

$x^n = \mathrm{e}^{nln(x)}$ avec $x > 0$. Donc $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \mathrm{e}^{x-nln(x)}$.
$x - nln(x) = x(1 - n\dfrac{ln(x)}{x})$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - n\dfrac{ln(x)}{x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$.
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-nln(x)} = +\infty$.

Propriété 4 :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0 \qquad n \text{ entier naturel, } n \geq 1.$$

Démonstration

On pose $X = -x$; Quand x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$.
$x^n\mathrm{e}^x = (-X)^n\mathrm{e}^{-X} = (-1)^n\dfrac{X^n}{\mathrm{e}^X}$.
Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^n}{\mathrm{e}^X} = 0$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} (-1)^n\dfrac{X^n}{\mathrm{e}^X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$.

8 Fonction logarithme décimal (Log)

Définition : $Log(x) = \dfrac{ln(x)}{ln(10)}$ avec $x > 0$.

Valeurs remarquables : $Log(10) = 1$ $Log(1) = 0$ $Log(10^3) = 3$ $Log(10^n) = n$

Intérêt : Recherche du nombre de chiffre du nombre 2012^{2012}.

9 Fonction puissance $x \to x^r$ avec r rationnel c'est à dire $r = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont entiers.

Définition :

x réel $x > 0$

1. r rationnel positif, $r = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers, $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$.
2. r rationnel positif, $r = -\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers, $x^r = \dfrac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \dfrac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$.

9.1 Étude des fonctions $x \to x^r$ avec $x \in]0; +\infty[$

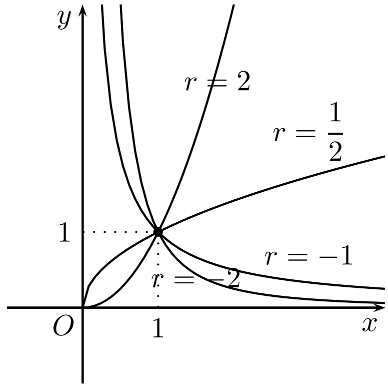
Pour l'étude de ces fonctions, on utilise la relation $x^r = \mathrm{e}^{rln(x)}$.
$f(x) = x^r = \mathrm{e}^{rln(x)}$ donc $f'(x) = \dfrac{r}{x}\mathrm{e}^{rln(x)}$; on a donc que $f'(x)$ a le même signe que r. Donc il y a deux cas :

<u>$r < 0$</u>

x	0	$+\infty$
variation de f	$+\infty$ ↘	0

<u>$r > 0$</u>

x	0	$+\infty$
variation de f	0 ↗	$+\infty$



10 Fonction exponentielle de base a ($a > 0$)

<u>Définition :</u> a réel strictement positif. On note $x \to a^x$ l'exponentielle de base a et $a^x = \mathrm{e}^{xln(a)}$

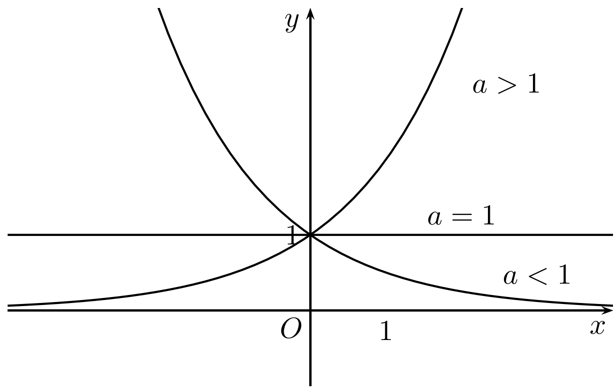
<u>Propriété :</u> L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$; On a $f'(x) = ln(a)\mathrm{e}^{xln(a)}$.
Deux cas suivant les valeurs de a.

<u>$0 < a < 1$</u>

x	$-\infty$	$+\infty$
variation de f	$+\infty$ ↘	0

<u>$a > 1$</u>

x	$-\infty$	$+\infty$
variation de f	0 ↗	$+\infty$



 page 7 page 7